

$$\delta\theta_n^2 = \frac{\sigma_{H(s)}^2}{2P_i} = \frac{N_0}{2P_i} \int_0^\infty |H(j2\pi f)|^2 df$$

结合上式和锁相环等效噪声带宽 B_n 的定义可得：

$$\delta\theta_n^2 = \frac{N_0 B_n}{2P_i} \quad (4.145)$$

由以上分析可知，系统稳态相差和误差传递函数 $E(s)$ 正相关，而加性噪声导致的随机相差和闭环系统传递函数 $H(s)$ 正相关。于是减小噪声带宽 B_n 能减小随机相差，但会增大稳态相差；增大噪声带宽 B_n 能减小稳态相差，却使随机相差恶化。随机相差和稳态相差的要求相互矛盾，设计者必须在两者间折中考虑。

北斗和 GPS 接收机中的跟踪环在实现形式上要比图 4.32 复杂得多，相应的环路噪声的分析也要困难得多，但将其线性化后其最根本的结构还是基本的锁相环结构。除了上面分析的随机相差和稳态相差对相位的影响外，同时时钟抖动（Clock Jitter）对跟踪环路的影响也不可忽略，导致 GPS 接收机对时钟的稳定性要求很高。关于时钟抖动的影响，限于篇幅，这里不详细赘述，有兴趣的读者可以参看参考文献[9]的第 5 章和参考文献[8]的第 12 章内容。

下面两节将对北斗和 GPS 接收机中的载波跟踪环和伪码跟踪环做详细说明。由于两个环路相互耦合，两个环路的参数会互相影响环路的性能，所以对两个环路同时分析是十分困难的。本书将采用各个击破的方式，在分析载波环时假设伪码相位已经对齐，在分析伪码环时假设载波相位已经被稳定锁定，这样会使分析大大简化，同时和实际中环路锁定时的稳态情况相符。

4.2.3 载波跟踪环

北斗和 GPS 接收机中的载波同步大多是通过科斯塔斯环实现的。科斯塔斯环是美国工程师 John P. Costas 在 20 世纪 50 年代发明的，为了纪念 John 而用其名字命名，科斯塔斯环的提出被认为“对现代数字通信领域产生了非常深远的影响”^[22]。本节将对科斯塔斯环在卫星导航定位接收机基带信号处理中的应用进行详细的介绍。

1. 科斯塔斯环的基本形式

图 4.33 所示是科斯塔斯环的基本结构，主要的逻辑单元包括乘法器、载波 NCO、环路滤波器、鉴相器、积分输出单元（Integrate & Dump）等。输入信号首先经过伪码发生器进行伪码剥离，然后与本地载波 NCO 输出的同相和正交分量相乘，其结果分别用同相和正交积分器积分并转储得到同相分量 $I(t)$ 和正交分量 $Q(t)$ ，积分结果送给鉴相器得到相位误差信号，相位误差作为输入送给环路滤波器，得到的误差信号反馈给载波 NCO，完成对信号载波的跟踪调整。由于利用了本地载波的同相和正交信号，所以科斯塔斯环也被称作同相正交环。从信号流程上看和前面讲解的基本锁相

环类似，都是闭环反馈系统，但科斯塔斯环中的相位误差信号的产生和基本锁相环相比稍显复杂一些，下面将要看到利用了同相和正交信号得到相位误差信号带来的好处。

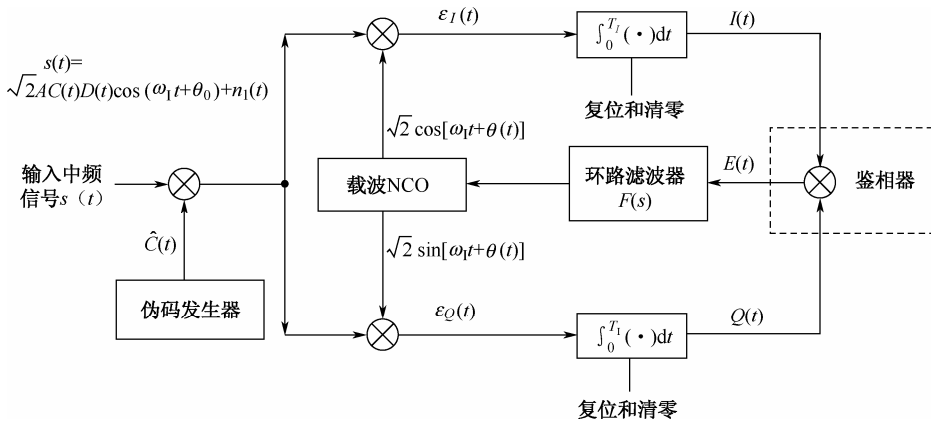


图 4.33 科斯塔斯环的基本结构

图 4.33 中的伪码发生器是北斗和 GPS 接收机特有的，如果单纯为了进行载波信号的同步而言，伪码发生器并不是必须的，但从北斗和 GPS 测距信号的结构特征上来看，伪码发生器是必不可少的，因为只有这样才能把伪码信号去除，从而能够让积分输出单元进行 1 ms 时间长度以上的积分，否则积分结果就会由于伪码分量的存在而产生类似噪声的结果。图 4.33 中的伪码发生器必须根据待处理的信号而调整，当处理 GPS 信号时必须设置为 GPS 伪码发生器，当处理北斗信号时必须设置为北斗伪码发生器。

图 4.33 中我们假设输入信号 $s(t) = \sqrt{2}AC(t)D(t)\cos(\omega_1t + \theta_0) + n_1$ 。这里， A 是信号幅度； $C(t)$ 是伪随机码； $D(t)$ 是数据比特； ω_1 是载波频率； θ_0 是载波初始相位； $n_1(t)$ 是高斯白噪声，并假设其单边功率谱密度为 N_0 。在本节中将暂时忽略噪声项，因为在下面章节中将专门分析科斯塔斯环的噪声性能。

首先， $s(t)$ 和伪码发生器产生的本地伪码 $\hat{C}(t)$ 相乘，这里 $\hat{C}(t) = C(t + \tau)$ ， τ 表示的是本地伪码和输入信号的伪码相位差，当伪码跟踪环稳定锁定时， $\tau \approx 0$ ，这样就有

$$C(t)\hat{C}(t) \approx C^2(t) = 1$$

所以，此处可以认为经过本地伪码相乘之后，输入信号已经将伪码信号去除，即完成了伪码解扩的过程。信号经过伪码发生器的乘法器后，可以用下式表示：

$$s(t)\hat{C}(t) \approx \sqrt{2}AD(t)\cos(\omega_1t + \theta_0) \quad (4.146)$$

式(4.146)中 $D(t)$ 是数据比特，对于 GPS 和北斗 D1 码信号来说数据码周期是 20 ms；对于北斗 D2 码信号来说数据周期是 2 ms。积分器的长度一般不要超过数据码周期，否则积分时间内会包括数据比特跳变，使部分积分结果正负抵消，从而影响积分的

结果, 严重时会产生错误的相位误差信号。积分时间 T_1 一般会 是 1 ms 的整数倍, 比如 5 ms、10 ms、20 ms 等, 这是因为北斗和 GPS 信号使用的伪码周期都是 1 ms。这里需要注意的是, 在进行超过 1 ms 长度的积分时, 往往需要在完成比特同步以后, 因为这样才能保证积分时间没有跨在比特跳变边界, 对于北斗 D1 码信号来说还存在二级码的剥离问题。

本地载波 NCO 输出的信号有两路, 一路是同相路 $\sqrt{2}\cos[\omega_1 t + \theta(t)]$, 另一路是正交路 $\sqrt{2}\sin[\omega_1 t + \theta(t)]$, 正交路输出实际是同相路输出经过相移 90° 得到的。这里 $\theta(t)$ 是本地载波相位和输入信号载波频率 $\omega_1 t$ 相异的部分, 其中也许只是载波初始相位的不同, 也可能是载波频率存在差别, 所以这里用一个关于时间 t 的函数来表示。

同相和正交支路的乘法器的输出信号为

$$\varepsilon_1(t) = AD(t)\cos(\omega_1 t + \theta_0)\cos[\omega_1 t + \theta(t)] \quad (4.147)$$

$$\varepsilon_Q(t) = AD(t)\cos(\omega_1 t + \theta_0)\sin[\omega_1 t + \theta(t)] \quad (4.148)$$

为了简化分析, 式(4.147)和(4.148)中省去了噪声项。

$\varepsilon_1(t)$ 和 $\varepsilon_Q(t)$ 经过积分器积分, 利用式(4.31)和(4.32)的结果, 可得同相积分器和正交积分器的输出为

$$I(t) = AD(t)T_1 \operatorname{sinc} \frac{\Delta\omega T_1}{2} \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2} T_1 + \phi(t)\right] \quad (4.149)$$

$$Q(t) = AD(t)T_1 \operatorname{sinc} \frac{\Delta\omega T_1}{2} \sin\left[\frac{\Delta\omega}{2} T_1 + \phi(t)\right] \quad (4.150)$$

式(4.149)和式(4.150)中, $\Delta\omega = \theta'(t)$ 是本地载波信号和输入信号的频率差, $\phi(t)$ 的定义如下:

$$\phi(t) \triangleq \theta(t) - \theta_0 \quad (4.151)$$

可见这里 $\phi(t)$ 实际就是输入信号和本地载波之间的相位差。

在进入载波跟踪阶段时, 输入信号和本地载波信号的频率已经很接近, 往往远小于积分器的带宽, 即 $\Delta\omega \ll 1/T_1$, 于是 $\Delta\omega T_1 \approx 0$, 所以式(4.149)和式(4.150)可以近似为

$$I(t) \approx AD(t)T_1 \cos[\phi(t)] \quad (4.152)$$

$$Q(t) \approx AD(t)T_1 \sin[\phi(t)] \quad (4.153)$$

经典的科斯塔斯环利用一个乘法器完成鉴相, 如图 4.33 中的虚框内所示, 实际的鉴相器不一定是乘法器, 在下面的小节中会介绍几种不同的鉴相器。当用乘法器行使鉴相功能时, 输出的相位误差信号 $E(t)$ 为

$$E(t) = I(t)Q(t) = \frac{1}{2} A^2 D^2(t) T_1^2 \sin[2\phi(t)] \quad (4.154)$$

式(4.154)中的 $D(t)$ 经过平方以后变为 1, 可见乘法器作为鉴相器使得科斯塔斯环对数据比特的 +1 和 -1 值不敏感, 经过归一化处理后式(4.154)得到的相位误差为

$\sin 2\phi(t)$ ，当 $\phi(t)$ 很小时， $\sin 2\phi(t) \approx 2\phi(t)$ ，这里归一化可以用 $\sqrt{I^2(t)+Q^2(t)}$ 的值作为除数完成。

图 4.34 表示了科斯塔斯环对数据比特跳变不敏感的性质，图 4.34(a) 表示 $D(t)=1$ 的情况，图 4.34 (b) 表示 $D(t)=-1$ 的情况，两种情况下鉴相器输出的均为 $2\phi(t)$ 。

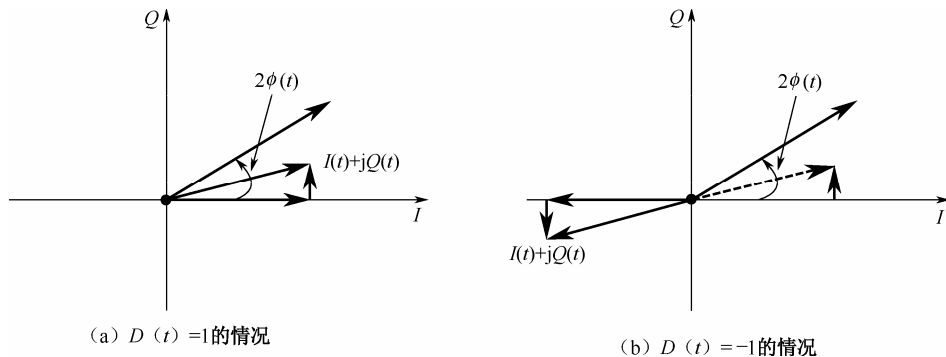


图 4.34 科斯塔斯环对数据比特的变化不敏感

鉴相器输出的相位误差信号通过环路滤波器滤除大部分的高频分量以后，作为载波 NCO 的调整信号，使得本地载波频率和输入信号频率越来越接近，最终达到频率和相位的锁定。整个闭合环路中的分析可以参看 4.2.1 节中有关基本锁相环部分的环路滤波器 $F(s)$ 、系统传递函数 $H(s)$ 、误差传递函数 $E(s)$ 和动态应力稳态相差的分析。

当实现相位跟踪以后， $2\phi(t) \approx 0$ ，此时从式(4.149)和式(4.150)可以看出，I 路积分器将输出数据比特，Q 路积分器没有任何信号分量，只有一些噪声信号，所以从 I 路可以直接读出数据比特，然后送给后续单元进行导航电文解调。

2. 鉴相器和鉴频器

科斯塔斯环使用的鉴相器有多种，表 4.3 给出了在北斗和 GPS 接收机中常用的四种，分别是 $I(t) \times Q(t)$ 、 $\text{sign}[I(t)] \times Q(t)$ 、 $Q(t)/I(t)$ 、 $\text{atan}[Q(t)/I(t)]$ ，其中 $\text{sign}[\cdot]$ 表示取符号操作，值为+1 或-1。

表 4.3 科斯塔斯环常用的几种鉴相器

鉴相器类型	输出的相位差	性质
$Q(t) \times I(t)$	$\sin[2\phi(t)]$	经典 Costas 环鉴相器，在低信噪比情况下有近似优化的鉴相特性，鉴相斜率受信号幅度影响较大
$Q(t) \times \text{sign}[I(t)]$	$\sin \phi(t)$	在高信噪比情况下有近似最优的鉴相特性，鉴相受信号幅度影响较大，运算量较小
$Q(t)/I(t)$	$\tan \phi(t)$	在高信噪比和低信噪比情况下都有接近最优的鉴相特性，鉴相斜率不受信号幅度影响，在相差为 $\pm 90^\circ$ 时会发散
$\text{atan}[Q(t)/I(t)]$	$\phi(t)$	两象限的反正切函数，在高信噪比和低信噪比情况下都有最优的鉴相特性，鉴相斜率不受信号幅度影响

表 4.3 的四种鉴相器输出的相位差的表达式并不难理解，只需要将式(4.152)和式(4.153)代入即可得到，推导过程中可以忽略噪声项以简化分析。值得提出的是，四种鉴相器的输出相位差的鉴相范围均为 -90° 到 $+90^\circ$ 。 $I(t) \times Q(t)$ 自不必说，因为 $\sin[2\phi(t)]$ 的周期就是 180° ，比较容易误解的是 $\text{sign}[I(t)] \times Q(t)$ ，因为根据表中的结果其输出相位差是 $\sin\phi(t)$ ，直观上看其周期应该是 360° ，鉴相范围应该是 -180° 到 $+180^\circ$ ，但由于 $\text{sign}[I(t)]$ 乘积项的值域跳跃影响导致输出的相位差在 $\pm 90^\circ$ 发生跳变，使得鉴相范围在 $[90^\circ, 180^\circ]$ 时重复 $[-90^\circ, 0^\circ]$ 之间的情况，在 $[-180^\circ, 90^\circ]$ 时重复 $[0^\circ, 90^\circ]$ 之间的情况。 $Q(t)/I(t)$ 、 $\text{atan}[Q(t)/I(t)]$ 对应的鉴相器输出范围也比较容易理解，读者可以自行分析。

图 4.35 所示是四种鉴相器的相位差输出的对比，图中为了更好的比较，只输出了相位差项，而省去了信号幅度即 $AD(t)T_I$ 项，并且将相位差均转换为角度。从图中可以看出， $\text{atan}[Q(t)/I(t)]$ 的线性度是四种之中最好的，但运算量也最大； $\text{sign}[I(t)] \times Q(t)$ 的线性度次之，运算量也比较小； $Q(t)/I(t)$ 和 $\text{atan}[Q(t)/I(t)]$ 由于有除法运算，所以有可能出现除零问题，但省去了归一化的问题； $I(t) \times Q(t)$ 和 $\text{sign}[I(t)] \times Q(t)$ 的运算量较小，但需做归一化处理，否则随着信号幅度的变化输出的相位差信号会发生较大幅度的变化。

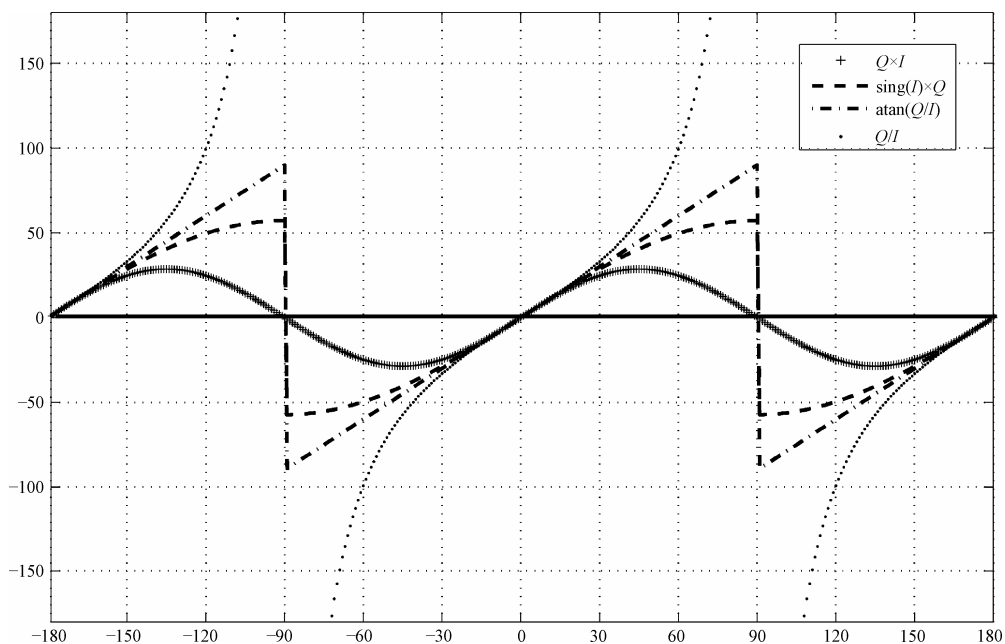


图 4.35 科斯塔斯环常用的四种鉴相器的鉴相曲线

实际中科斯塔斯环除了可以跟踪载波相位外，还可以用来跟踪载波频率，这种环路的结构和图 4.33 所示的环路结构基本一样，只是将其中的鉴相器换成了鉴频器，鉴频器的主要作用就是给出输入信号和本地载波的频率差，用来控制 NCO 的误差信

号不是相位差，而是变成了频率差，当环路稳定时锁定的是输入载波的频率。跟踪输入载波频率的科斯塔斯环也叫作 FLL，即锁频环（Frequency Lock Loop），有些研究者将其叫作“自动频率控制”环路，即 AFC 环路，这里的英文缩写是 Automatic Frequency Control 之意。因为频率是相位的微分，所以最基本的鉴频器就是将相邻两次的相位相减就是频差的估计值，即

$$\Delta f(kT_s) = \frac{\phi(kT_s) - \phi[(k-1)T_s]}{T_s} \quad (4.155)$$

在数字离散系统中，式(4.155)的计算过程可以用图 4.36 表示。

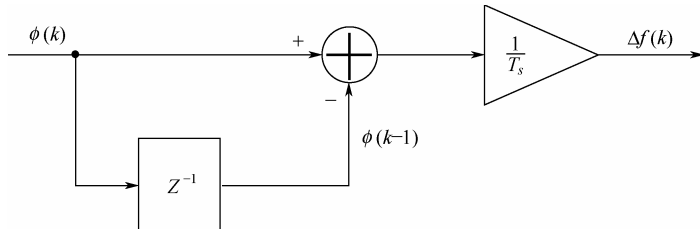


图 4.36 离散系统中频率差的计算原理

由于相位是频率的积分，所以在鉴频器输出的频率差经过环路滤波器之后，即将送给相位 NCO 之前需要增加一级积分器，图 4.37 是科斯塔斯锁频环的基本结构，读者可以和图 4.33 进行对比理解锁频环和锁相环的区别。

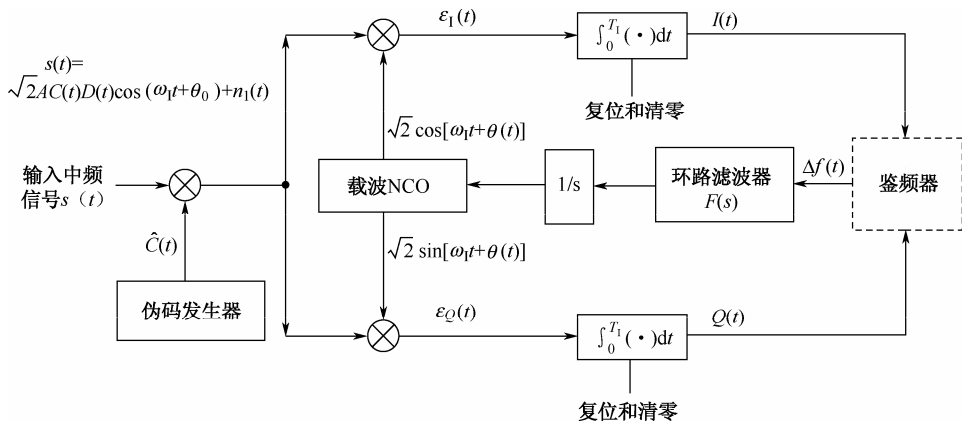


图 4.37 科斯塔斯 FLL 的基本结构

频率跟踪环和相位跟踪环相比，要比相位环更稳定一些，而且频率环的频率捕获范围要比相位环大得多。关于这一点，从直观的分析来说，相位跟踪环跟踪的是相位差，而相位差是频率差的积分，所以频率差必须接近于 0 才能保证相位差在一定范围内，所以说相位跟踪环对输入信号和本地载波的相位差有更高的要求。在相位差比较大的情况下，一般先使用频率环将输入信号和本地载波的频率差逐渐缩小到一定范围以内，然后相位环才能接管环路控制。在北斗和 GPS 接收机里，一般完

成信号捕获之后，由于数据比特跳变时刻还未知，与此同时输入信号和本地载波的频率差还比较大（ $\approx 100 \sim 500$ Hz），所以直接使用相位跟踪环无法保持相位锁定，这就需要有一个频率牵引的过程，而在此过程就可以使用频率环将频率差逐渐减小到相位环的捕获范围之内，然后再通过锁相环实现相位的稳定跟踪。

表 4.4 是几种常用的鉴频器方案，其中点乘和叉乘的数学意义分别如下所述：

$$\text{点乘} = I_k I_{k+1} + Q_k Q_{k+1} = A^2 D^2(t) T_I^2 \cos[\phi(k+1) - \phi(k)] \quad (4.156)$$

$$\text{叉乘} = I_k Q_{k+1} - Q_k I_{k+1} = A^2 D^2(t) T_I^2 \sin[\phi(k+1) - \phi(k)] \quad (4.157)$$

式(4.156)和(4.157)推导过程中用到了式(4.152)和式(4.153)的结果，并且省略了噪声项。

由式(4.156)和(4.157)的结果可以推导出表 4.4 的四种鉴频器的输出频率差信号。四种鉴频器中除了 atan2 四象限反正切鉴频器外，其他三种均和输入信号的幅度有关，所以通常需要进行归一化处理，归一化因子是 $1/\sqrt{I^2(t)+Q^2(t)}$ 或 $1/[I^2(t)+Q^2(t)]$ 。除了归一化处理之外，还需要除以两次积分时间间隔，即 (t_2-t_1) 。可见，无论哪种鉴频器，均需要利用相邻两次的 I 路和 Q 路积分结果，所以需要保证两次积分时刻没有跨在数据跳变的边沿上，否则相邻两次积分时刻的 $D(t)$ 发生了改变，式(4.156)和(4.157)中 $D^2(t)$ 就不成立了，此时鉴频器将输出一个错误的频率差结果，继续利用该频率差修正环路会产生不良的影响。从这个角度说，采用叉乘和点乘鉴相器时最好在完成比特同步之后。

表 4.4 科斯塔斯环常用的几种鉴频器

鉴频器类型	输出频差	鉴频特性
$\frac{\text{叉乘}}{t_2-t_1}$	$\frac{\sin(\phi_2-\phi_1)}{t_2-t_1}$	低信噪比时有接近优化的鉴频特性，受信号幅度影响较大
$\frac{\text{叉乘} \times \text{sign(点乘)}}{t_2-t_1}$	分段的 $\frac{\sin(\phi_2-\phi_1)}{t_2-t_1}$	高信噪比时有接近优化的鉴频特性，受信号幅度影响较大
$\frac{\text{atan2(叉乘,点乘)}}{t_2-t_1}$	$\frac{\phi_2-\phi_1}{t_2-t_1}$	最大似然估计，在高信噪比和低信噪比时都有优化的鉴频特性，受信号幅度影响不大，但运算量较大
$\frac{\text{叉乘} \times \text{点乘}}{t_2-t_1}$	$\frac{\sin[2(\phi_2-\phi_1)]}{t_2-t_1}$	高信噪比时有接近优化的鉴频特性，受信号幅度影响较大

注：点乘 = $I_1 \times I_2 + Q_1 \times Q_2$ ，叉乘 = $I_1 \times Q_2 - I_2 \times Q_1$ ；下标 1、2 表示相邻时间间隔的积分器输出

图 4.38 所示是表中的四种鉴频器的鉴频特性曲线，从图中可以看出 atan2 四象限反正切鉴频器的线性度最好，但需要的运算量也最大。叉乘鉴频器的频率牵引范围和 atan2 四象限反正切鉴频器一样，都是 -100 Hz \sim $+100$ Hz，叉乘 \times sign（点乘）鉴频器是分段的 $\sin(\phi_2-\phi_1)$ 函数值域范围，其频率牵引范围只有 -50 Hz \sim $+50$ Hz。频率牵引范围和积分时间间隔有关，为积分时间间隔的倒数，所以如果积分时间间隔

增大为 10 ms, 则图 4.38 中各鉴频器的频率牵引范围都需要变成一半。

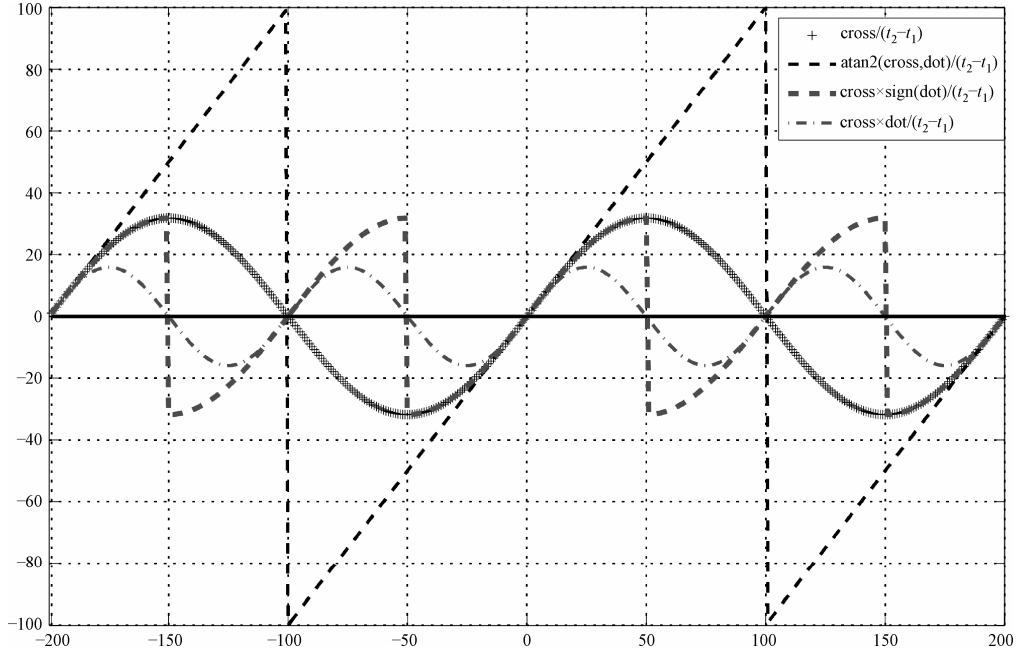


图 4.38 四种鉴频器的鉴频特性曲线 (积分间隔为 5 ms)

3. 科斯塔斯环的热噪声性能分析

前面分析了锁相环对于输入信号存在动态应力时的稳态相差, 实际中影响相差的因素还有时钟机械抖动和阿伦方差导致的随机相差, 另外一个更为显著的因素是由于输入信号中的热噪声引起的相差, 本节将对科斯塔斯环的热噪声性能进行分析。

在上述两小节中都忽略了噪声项, 目的是突出信号部分而简化分析, 本节将恢复噪声项, 并假定噪声项为高斯白噪声。研究的对象为科斯塔斯环的 PLL, 鉴相器类型为 $I(t) \times Q(t)$, 相干积分时间长度假设为 T_1 。

首先假设 4.2.3 第 1 节中的输入信号 $s(t)$ 中的噪声 n_1 为窄带高斯随机过程, 表示为

$$n_1(t) = \sqrt{2}n_c \cos(\omega_1 t + \theta_0) + \sqrt{2}n_s \sin(\omega_1 t + \theta_0) \quad (4.158)$$

这里假设 n_c 和 n_s 的单边噪声功率谱密度为 N_0 , 分布为高斯白噪声, 均值为 0, n_c 和 n_s 为平稳高斯过程, 相互不相关或统计独立。将接收到卫星信号中的噪声假设为窄带高斯随机过程是合理的, 因为射频前端的带宽远小于载波频率, 噪声的频谱被限制在以载波频率频点为中心的一个窄的频带上。

本地载波信号和伪码剥离后的输入信号相乘, 得到 $\varepsilon_1(t)$ 和 $\varepsilon_Q(t)$, 分别可以表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= 2AD(t)\cos(\omega_1 t + \theta_0)\cos[\omega_1 t + \theta(t)] + \sqrt{2}n_1(t)\cos[\omega_1 t + \theta(t)] \\ \varepsilon_Q(t) &= 2AD(t)\cos(\omega_1 t + \theta_0)\sin[\omega_1 t + \theta(t)] + \sqrt{2}n_1(t)\sin[\omega_1 t + \theta(t)] \end{aligned}$$

将式(4.158)代入上面两式, 经过整理, 并略去高频分量, 可以得到

$$\varepsilon_I(t) = AD(t)\cos[\phi(t)] + n_c\cos[\phi(t)] - n_s\sin[\phi(t)] \quad (4.159)$$

$$\varepsilon_Q(t) = AD(t)\sin[\phi(t)] + n_c\sin[\phi(t)] + n_s\cos[\phi(t)] \quad (4.160)$$

由于每次积分器完成当前积分之后, 本地 NCO 才会得到误差信号来调整本地载波相位, 同时积分时间很短, 所以可以认为 $\phi(t)$ 在积分器积分操作期间是不变的, 所以在后续分析中可以将其时间变量 t 略去。同时从上面分析可知, 数据比特 $D(t)$ 在积分操作期间也保持不变, 所以 $D(t)$ 中的时间变量 t 也可以略去。于是 I 路和 Q 路积分器输出的信号可以简化为

$$I(t) = ADT_1\cos\phi + N_c\cos\phi - N_s\sin\phi$$

$$Q(t) = ADT_1\sin\phi + N_c\sin\phi + N_s\cos\phi$$

这里

$$N_c = \int_0^{T_1} n_c dt, \quad N_s = \int_0^{T_1} n_s dt$$

由高斯白噪声的性质可知, N_c 和 N_s 依然是高斯分布, 其均值依然为 0, 方差变为 $\sigma_{N_c}^2 = \sigma_{N_s}^2 = N_0 T_1$ 。

利用 $D^2(t) = 1$ 和以上分析结果, 可以得出 $I(t) \times Q(t)$ 鉴相器的输出

$$\begin{aligned} z(t) &= [ADT_1\cos\phi + N_c\cos\phi - N_s\sin\phi][ADT_1\sin\phi + N_c\sin\phi + N_s\cos\phi] \\ &= \frac{1}{2}A^2T_1^2\sin 2\phi \\ &\quad + (ADT_1N_c + \frac{N_c^2}{2} - \frac{N_s^2}{2})\sin 2\phi + (ADT_1N_s + N_cN_s)\cos 2\phi \end{aligned} \quad (4.161)$$

噪声项

式(4.161)中的信号项就是鉴相器得到的相差信号, 和式(4.154)结果一致, 可以看出, 信号强度和输入信号幅度 A^2 成正比, 同时也和积分时间 T_1^2 成正比。这一点和直观分析吻合, 积分时间越长则相差信号越强。但注意这里的前提是 $\phi(t)$ 在积分时间内不变, 如果 $\phi(t)$ 包含频差, 而该频差已经大于 $1/T_1$ 的话, 那么该结论将不再成立, 这一点在分析鉴频器的频率牵引范围时已经说明。

下面要仔细分析式(4.161)中的噪声项, 为简化分析, 可以设

$$N(t) = (ADT_1N_c + \frac{N_c^2}{2} - \frac{N_s^2}{2})\sin 2\phi(t) + (ADT_1N_s + N_cN_s)\cos 2\phi(t)$$

容易验证 $N(t)$ 均值为 0, 所以其方差

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= E[N^2(t)] \\ &= E[A^2T_1^2N_c^2 + \frac{N_c^4}{4} + \frac{N_s^4}{4} - \frac{N_s^2N_c^2}{2}]\sin^2 2\phi(t) \\ &\quad + E[A^2T_1^2N_s^2 + N_c^2N_s^2]\cos^2 2\phi(t) \end{aligned} \quad (4.162)$$

上式中 $E[\cdot]$ 意为数学期望。

由于 N_c 和 N_s 依然是高斯分布, 且其方差为 $N_0 T_1$, 则式(4.162)可以进一步简化, 因为根据下列条件

$$E[N_c^2] = E[N_s^2] = N_0 T_1 \quad (4.163)$$

$$E[N_c^4] = E[N_s^4] = 3E[N_s^2]^2 = 3N_0^2 T_1^2 \quad (4.164)$$

将式(4.163)和(4.164)代入式(4.162)得到

$$\sigma_{N(t)}^2 = A^2 T_1^2 N_0 T_1 + N_0^2 T_1^2 \quad (4.165)$$

由于相邻积分单元中的噪声项可以看作不相关的, 因此 $N(t)$ 在时间上呈现“白”色, 由 $N(t)$ 的“白”噪声特性, 可以将其自相关函数写为

$$R_{N(t)}(\tau) = \begin{cases} \sigma_{N(t)}^2 \left[1 - \frac{|\tau|}{T_1}\right], & \text{当 } |\tau| < T_1 \\ 0, & \text{当 } |\tau| > T_1 \end{cases}$$

将 $R_N(\tau)$ 做傅里叶变换, 得到 $N(t)$ 的噪声功率谱密度, 可用下式表示,

$$S_N(f) = (A^2 T_1^3 N_0 + N_0^2 T_1^2) T_s \frac{\sin \pi f T_1}{\pi f T_1} \quad (4.166)$$

图 4.39 (a) 和图 4.39 (b) 分别给出了 $R_N(\tau)$ 和 $S_N(f)$ 的图示。图 (b) 中的虚线和频率轴的交点是环路的等效噪声带宽 B_n 。图中给出 B_n 的目的是为了说明当 $B_n \ll 1/T_1$ 时, 可以把 $S_N(f)$ 看作近似是平坦的。也就是说, 在环路噪声带宽 B_n 以内可以把 $N(t)$ 看成白噪声, 其平均功率谱密度 $N'_0 \approx (A^2 T_1^3 N_0 + N_0^2 T_1^2)$ 。这个近似可以极大地简化后面的分析。实际上, 北斗和 GPS 接收机中载波跟踪环的噪声带宽一般在几十赫兹以内, 积分时间如果是 1 ms, 则 $1/T_1 = 1 \text{ kHz}$, 所以这个条件是可以满足的。在积分时间增长的情况下, 噪声带宽也需要相应地减小以便在 B_n 范围内依然可以把噪声看作是白噪声。在 $B_n \ll 1/T_1$ 的条件下, 闭环噪声功率可以用 $N'_0 B_n$ 表示, 于是可以利用 4.2.2 节的结论, 得出载波环的随机相差的方差为

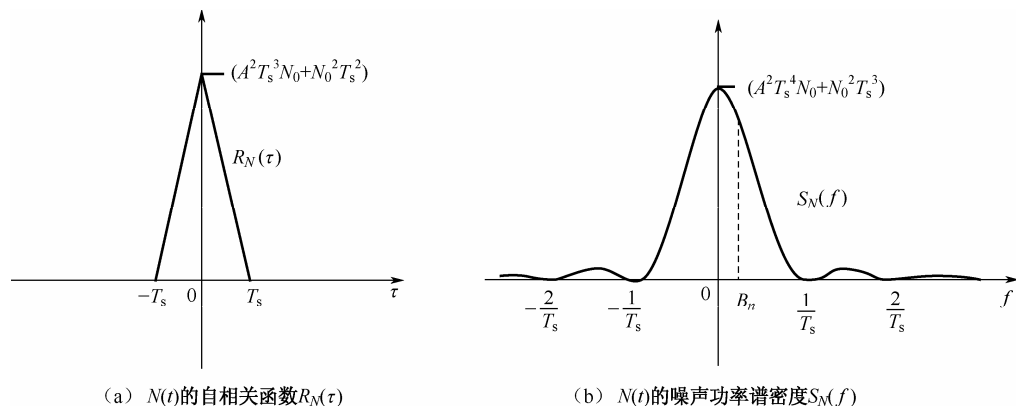


图 4.39

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{2\text{SNR}} = \frac{N'_0 B_n}{2P_i}, \quad \left(\text{这里, } P_i = \frac{A^2 T_1^2}{2} \right) \\ &= \frac{2N_0 B_n}{A^2} \left[1 + \frac{N_0}{A^2 T_1} \right]\end{aligned}\quad (4.167)$$

式中, $P_i = \frac{A^2 T_1^2}{2}$ 由式(4.161)中的信号项部分得到。

由于 N_0 为 n_c 和 n_s 的单边噪声功率谱密度, 则定义输入信号的载噪比 CN_0 如下,

$$\text{CN}_0 \triangleq \frac{A^2}{2N_0}$$

将 CN_0 的定义代入式(4.167)则 $\bar{\theta}_n^2$ 可以写成

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_n^2 &= \frac{B_n}{\text{CN}_0} \left[1 + \frac{1}{2\text{CN}_0 T_1} \right] \\ &= \frac{B_n}{\text{CN}_0 S_L}\end{aligned}\quad (4.168)$$

式(4.168)就是科斯塔斯环 PLL 相差和输入载噪比、等效噪声带宽以及相干积分时间的关系, 其中式

$$S_L = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\text{CN}_0 T_1}}\quad (4.169)$$

被称作“平方损失”。从该式可以看出, 平方损失和输入载噪比有密切的关系: 输入信号载噪比越强, 则平方损失越小, 反之则越大。同时式(4.169)也表明, 积分时间的长短可以抵消输入载噪比的影响。对于较弱的信号, 选用较长的积分时间可以减小平方损失。从上述推导过程中可以看出, 平方损失的根源是 $I(t) \times Q(t)$ 的过程中导致噪声项相乘, 出现了噪声项的高阶矩。

从式(4.168)可以推导出热噪声引起的随机相差的均方根为

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{\frac{B_n}{\text{CN}_0} \left[1 + \frac{1}{2\text{CN}_0 T_1} \right]}\quad (4.170)$$

上式中 $\bar{\sigma}_n$ 的单位为弧度, 可以把 $\bar{\sigma}_n$ 转化为以下两种形式

$$\bar{\sigma}_{n,D} = \frac{360}{2\pi} \sqrt{\frac{B_n}{\text{CN}_0} \left[1 + \frac{1}{2\text{CN}_0 T_1} \right]} \quad (^\circ)\quad (4.171)$$

$$\bar{\sigma}_{n,M} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{B_n}{\text{CN}_0} \left[1 + \frac{1}{2\text{CN}_0 T_1} \right]} \quad (\text{m})\quad (4.172)$$

式(4.171)是以度为单位的表示, 式(4.172)是以米为单位的表示, 其中 λ 为载波波长, 针对不同的信号 λ 的值需要调整。